Klasa IV | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

1. Wspólne klamerki

Odpowiedź: B. 9

1. Pomiędzy ośmioma rysunkami jest siedem miejsc na wspólne klamerki.

2. Na dwóch końcach rzędu są jeszcze dwie klamerki.

3. Razem użyto 7 + 2 = 9 klamerek.

2. Pięć notesów

Odpowiedź: C. 28 zł

1. Promocyjny zestaw trzech notesów kosztuje 7 + 7 = 14 zł.

2. Możemy kupić jeden zestaw i dwa pojedyncze notesy: 14 + 7 + 7 = 28 zł.

3. Dwa zestawy dałyby sześć notesów, a mamy kupić dokładnie pięć. Bez zestawu zapłacilibyśmy 5 × 7 = 35 zł. Najmniejszy koszt to 28 zł.

3. Kolejka do pracowni

Odpowiedź: D. Dawid

1. Gdyby Ada i Dawid zajmowali pierwsze dwa miejsca, Celina musiałaby być trzecia, a Bartek ostatni. To nie spełnia warunku.

2. Gdyby Ada i Dawid zajmowali drugie i trzecie miejsce, Celina musiałaby być pierwsza, a Bartek znów ostatni.

3. Zatem Ada i Dawid zajmują trzecie i czwarte miejsce. Przed nimi stoją Celina, a następnie Bartek.

4. Jedyna kolejność to: Celina, Bartek, Ada, Dawid. Ostatni jest Dawid.

4. Zegar w przedpokoju

Odpowiedź: C. 10:57

1. Ola musi naprawdę wyjść najpóźniej o 10:50, bo do 11:00 pozostaje wtedy 10 minut.

2. O tej chwili zegar spieszący się o 7 minut pokazuje 10:57.

Klasa IV | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

5. Przestawianie plakietek

Odpowiedź: C. A, C, B, D, E

1. Połączmy w myślach koniec rzędu z jego początkiem. W takim zamkniętym układzie sąsiadami A są B i E.

2. Przeniesienie pierwszej plakietki na koniec nie zmienia par sąsiadów w tym zamkniętym układzie. Odwrócenie całego rzędu zamienia stronę lewą z prawą, ale również nie zmienia tych par.

3. W układzie A, C, B, D, E sąsiadami A byłyby C i E. Tego układu nie można więc otrzymać.

4. Pozostałe układy są osiągalne: E, A, B, C, D powstaje po czterech przeniesieniach pierwszej plakietki na koniec; E, D, C, B, A po jednym odwróceniu; C, D, E, A, B po dwóch przeniesieniach.

6. Przez ogród

Odpowiedź: A. 15 m

1. Przez fontannę i altanę droga ma długość 6 + 4 + 5 = 15 m.

2. Droga brama-fontanna-plac zabaw ma 6 + 11 = 17 m, a brama-altana-plac zabaw także 12 + 5 = 17 m.

3. Pozostała droga bez wracania to brama-altana-fontanna-plac zabaw: 12 + 4 + 11 = 27 m. Powroty tylko wydłużają spacer. Najkrótsza droga ma więc 15 m.

7. Uparta waga

Odpowiedź: D. 12 g

1. Dołożono jedną paczkę, a wskazanie wzrosło z 18 g do 30 g.

2. Ponieważ waga w obu pomiarach dodała ten sam błąd, wzrost 30 − 18 = 12 g jest prawdziwą masą dołożonej paczki.

3. Sprawdzenie: przy masie 12 g waga zawyża wynik o 6 g. Dwie paczki ważą 24 g, a waga pokazuje 24 + 6 = 30 g.

Klasa IV | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

8. Jedno połączenie drugi raz

Odpowiedź: D. C-D

1. Przy stanowisku C każdemu przyjściu kuriera towarzyszy odejście. Przejścia przy C muszą więc dać się połączyć w pary. To samo dotyczy stanowiska D.

2. Do każdego z tych stanowisk dochodzą trzy drogi. Gdyby każdą z nich przejść tylko raz, przy stanowisku byłyby trzy przejścia, których nie da się połączyć w pary.

3. Powtarzana droga musi zatem dochodzić zarówno do C, jak i do D. Może to być tylko droga C-D.

4. Taką trasę można przejść: A → C → D → A → B → C → D → B. Droga C-D występuje dwa razy, każda pozostała raz, a początek i koniec są zgodne z warunkiem.

9. Pytania, które nie wystarczą

Odpowiedź: A. 5 i 7

1. Liczby 5 i 7 dają dokładnie te same odpowiedzi: obie są większe niż 4, żadna nie jest parzysta i żadna nie jest mniejsza niż 3.

2. Powtarzanie tych pytań ani zmiana ich kolejności nie dostarczy nowej informacji. Nie można więc rozróżnić 5 i 7.

3. Liczby 1 i 3 rozróżnia pytanie o liczbę mniejszą niż 3. Liczby 2 i 6 oraz liczby 4 i 8 rozróżnia pytanie o liczbę większą niż 4.

10. Paczuszki z kredkami

Odpowiedź: B. 4

1. Paczuszka z 8 kredkami musi leżeć sama, bo nawet dołożenie najmniejszej dałoby 8 + 3 = 11 kredek.

2. W pozostałych paczuszkach są 7 + 4 + 4 + 4 + 3 = 22 kredki. Nie mieszczą się w dwóch pudełkach, bo te pomieszczą najwyżej 20 kredek.

3. Potrzeba zatem co najmniej czterech pudełek. Cztery wystarczą: [8], [7 i 3], [4 i 4], [4].

Klasa IV | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

11. Czas na oprawę

Odpowiedź: 19

1. Lena może zacząć składać ramkę od razu po włączeniu drukarki.

2. Ramka będzie gotowa po 12 minutach, a wydruk po 15 minutach. Dopiero wtedy można rozpocząć oprawianie plakatu.

3. Oprawianie zajmie kolejne 4 minuty, więc najwcześniej plakat będzie gotowy po 15 + 4 = 19 minutach.

4. Szybciej się nie da: sam wydruk musi być gotowy, zanim zaczną się ostatnie 4 minuty pracy.

12. Nocny kod

Odpowiedź: 5

1. Oznaczmy słońce przez S, księżyc przez K, a gwiazdę przez G.

2. Jeśli drugi symbol to K, otrzymujemy tylko dwa poprawne kody: S K S G K oraz S K G S K.

3. Jeśli drugi symbol to G, otrzymujemy tylko trzy poprawne kody: S G S G K, S G K S K oraz S G K G K.

4. Drugi symbol nie może być S, więc wyczerpaliśmy wszystkie możliwości. Razem jest 2 + 3 = 5 kodów.

13. Stroje drużyn

Odpowiedź: 4

1. Dwie drużyny nie mogą mieć jednocześnie jednakowych kolorów czapki i koszulki: różniłyby się wtedy najwyżej chustą, czyli tylko jednym elementem.

2. Możliwe są cztery pary kolorów czapki i koszulki: granatowy-granatowy, granatowy-pomarańczowy, pomarańczowy-granatowy oraz pomarańczowy-pomarańczowy. Drużyn może być zatem najwyżej cztery.

3. Cztery drużyny można ubrać tak, zapisując kolejno kolory czapki, koszulki i chusty: GGG, GPP, PGP oraz PPG. Litera G oznacza granatowy, a P pomarańczowy.

4. Każde dwa z tych czterech zestawów różnią się dokładnie w dwóch miejscach. Cztery stroje spełniają więc warunek i jest to największa możliwa liczba.

Klasa IV | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

14. Dwie prawdziwe wskazówki

Odpowiedź: 5

1. Pary z większą liczbą 5 to (1, 5), (2, 5), (3, 5) i (4, 5). W każdej dokładnie dwie wskazówki są prawdziwe: trzecia i jedna z dwóch pierwszych.

2. Gdy większą liczbą jest 6, trzecia wskazówka jest fałszywa. Obie pierwsze muszą być prawdziwe. Spełnia je tylko para (2, 6): suma wynosi 8, a wynik mnożenia 12.

3. Gdy obie liczby są mniejsze niż 5, ich największa możliwa suma to 3 + 4 = 7. Pierwsza i trzecia wskazówka są wtedy fałszywe, więc takich par nie wybieramy.

4. Możliwych par jest 4 + 1 = 5.

15. Dwa sposoby na wygraną

Odpowiedź: 9

1. Oskar powinien postawić X na polu 9.

2. Wtedy do ukończenia prawej kolumny 3, 6, 9 brakuje mu pola 3, a do ukończenia przekątnej 1, 5, 9 pola 5.

3. Ola może zająć co najwyżej jedno z pól 3 i 5. Oskar zajmie drugie i wygra. Ola nie może w swoim ruchu wygrać wcześniej, bo jej obecne pola 2 i 4 nie leżą w jednej zwycięskiej linii.

4. Pozostałe ruchy nie zapewniają takiej wygranej: po X na 3 lub 5 Ola blokuje pole 9; po X na 7 lub 8 Oskar nie ma żadnej linii, którą mógłby uzupełnić jednym kolejnym X.

Klasa V | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

1. Trzy dni pracy

Odpowiedź: A. 1/10

1. W poniedziałek i wtorek pomalowano 3/10 + 4/10 = 7/10 planszy.

2. Na środę zostało 10/10 − 7/10 = 3/10 planszy.

3. We wtorek pomalowano o 4/10 − 3/10 = 1/10 całej planszy więcej niż w środę.

2. Dwa znaczki

Odpowiedź: C. 44 cm²

1. Pole jednego znaczka wynosi 6 × 4 = 24 cm², a suma pól dwóch znaczków to 48 cm².

2. Wspólny kwadrat ma pole 2 × 2 = 4 cm². W sumie 48 cm² policzono go dwukrotnie.

3. Odejmujemy jedno pole wspólnego kwadratu: 48 − 4 = 44 cm².

3. Trzy kolory po wymianach

Odpowiedź: B. 3

1. Jeden granatowy żeton odpowiada dwóm białym, a jeden pomarańczowy - trzem granatowym, czyli sześciu białym.

2. Zestaw złożony z jednego żetonu każdego koloru odpowiada zatem 1 + 2 + 6 = 9 białym. Wymiany nie zmieniają łącznej wartości liczonej w białych żetonach.

3. Z początkowych 27 białych można więc otrzymać 27 : 9 = 3 takie zestawy. Każdego koloru muszą być 3 żetony.

4. Taki stan jest osiągalny: zostawiamy 3 białe, a pozostałe 24 wymieniamy na 12 granatowych. Zostawiamy 3 granatowe, a pozostałe 9 wymieniamy na 3 pomarańczowe.

4. Najkrótszy z pasujących pasków

Odpowiedź: D. 0,605 m

1. Możemy zapisać długości tak: 0,580 m, 0,650 m, 0,605 m oraz 0,600 m.

2. Dłuższe niż 0,600 m są tylko paski 0,650 m i 0,605 m.

3. Krótszy z nich ma długość 0,605 m.

Klasa V | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

5. Dziurki w złożonym pasku

Odpowiedź: D. 6 cm

1. Na pasku złożonym do długości 10 cm dziurka jest oddalona od jednego końca o 3 cm, a od drugiego o 7 cm.

2. Rozkładamy tylko ostatnie zgięcie, uzyskując pasek długości 20 cm. Dziurki mogą leżeć 3 i 17 cm od jego końca albo 7 i 13 cm od tego końca. Zależy to od tego, przy którym końcu przekłuto pasek.

3. Po całkowitym rozłożeniu otrzymujemy położenia 3, 17, 23, 37 cm albo 7, 13, 27, 33 cm, liczone od jednego końca paska.

4. W pierwszym przypadku odstępy kolejnych dziurek wynoszą 14, 6 i 14 cm, a w drugim 6, 14 i 6 cm. W obu przypadkach najmniejszy odstęp ma 6 cm.

6. Tablica podzielona na dwie części

Odpowiedź: C. 44 cm

1. Suma obwodów obu części wynosi $26 + 34 = 60$ cm.

2. W tej sumie każdy odcinek zewnętrznego brzegu tablicy policzono raz, a wewnętrzny odcinek podziału - dwa razy.

3. Obwód całej tablicy wynosi więc $60 - 8 - 8 = 44$ cm.

7. Trzy odczyty z regału

Odpowiedź: B. 4

1. Na półkach 3 i 4 stoi razem $21 - 5 = 16$ figurek.

2. Na półkach 2, 3 i 4 jest 24 figurki, więc na półce 2 stoi $24 - 16 = 8$ figurek.

3. Na pierwszych trzech półkach jest 18 figurek. Na trzeciej stoi zatem $18 - 6 - 8 = 4$ figurki.

Klasa V | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

8. Nierówne kawałki papieru

Odpowiedź: D. 1/3

1. Możemy pomocniczo podzielić każdy z czterech pasów na trzy równe części. Cały arkusz ma wtedy 12 części o jednakowych polach.

2. Pomalowany duży pas zajmuje 3 takie części, a pomalowany mały kawałek jeszcze 1. Pomalowano więc 4 z 12 części.

3. Dwanaście części można podzielić na trzy grupy po cztery. Pomalowane pole stanowi zatem 1/3 całego arkusza.

9. Dwie różnice w zestawie

Odpowiedź: A. 18

1. Możemy wybrać trzy pary kształtów: koło i kwadrat, koło i trójkąt albo kwadrat i trójkąt.

2. Dla ustalonej pary kształtów pierwszy kształt może mieć jeden z 3 kolorów. Drugi musi mieć inny kolor, więc ma 2 możliwości. Daje to $3 \times 2 = 6$ zestawów.

3. Łącznie jest $6 + 6 + 6 = 18$ zestawów. Każdy został policzony raz, przy swojej parze kształtów.

10. Sześć odległości

Odpowiedź: C. 3 cm

1. Skrajne punkty dzieli 6 cm. Oznaczmy ich położenia liczbami 0 i 6. Pozostałe punkty muszą leżeć przy liczbach całkowitych od 1 do 5, bo ich odległości od punktu 0 są całkowitymi liczbami centymetrów.

2. Odległość 5 cm może łączyć tylko położenia 0 i 5 albo 1 i 6. Po ewentualnym odwróceniu rysunku możemy przyjąć, że jeden z punktów wewnętrznych leży przy liczbie 1.

3. Drugi punkt wewnętrzny może wtedy leżeć tylko przy liczbie 2, 3, 4 albo 5.

4. Położenie 2 powtarza odległość 1, położenie 3 powtarza odległość 3, a położenie 5 powtarza odległość 1. Pozostaje położenie 4.

5. Punkty przy 0, 1, 4 i 6 dają odległości 1, 4, 6, 3, 5 i 2. Dwa środkowe punkty dzieli $4 - 1 = 3$ cm.

Klasa V | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

11. Rosnący szereg modeli

Odpowiedź: 3

1. Nie można zachować jednocześnie modeli wysokości 7 i 4 cm: wyższy stoi przed niższym. Tak samo nie można zachować obu modeli z par 8 i 5 cm oraz 11 i 10 cm.

2. Te trzy pary nie mają wspólnych modeli. Z każdej trzeba więc usunąć co najmniej jeden model, czyli łącznie przynajmniej 3.

3. Trzy usunięcia wystarczą: usuwamy modele wysokości 7, 8 i 11 cm. Zostają kolejno 3, 4, 5, 9 i 10 cm, a każdy kolejny jest wyższy. Minimum wynosi 3.

12. Terminarz bez zbędnych przerw

Odpowiedź: 2

1. Bez przerwy po meczu A-B można rozegrać tylko C-D. Analogicznie pozostałe pary meczów bez wspólnych drużyn to A-C z B-D oraz A-D z B-C.

2. Nie można rozegrać trzech meczów pod rząd bez żadnej przerwy: po dowolnym meczu jest tylko jeden mecz bez wspólnej drużyny, a po nim powrót do pierwszej pary oznaczałby powtórzenie już rozegranego meczu.

3. Sześć meczów trzeba więc podzielić na co najmniej trzy grupy, po najwyżej dwa mecze bez przerwy w każdej. Między trzema grupami są co najmniej dwie przerwy.

4. Dwie przerwy wystarczą: A-B, C-D, przerwa, A-C, B-D, przerwa, A-D, B-C. Zatem najmniejsza liczba przerw to 2.

Klasa V | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

13. Dwa stosy do wyboru

Odpowiedź: 15

1. Suma wszystkich liczb wynosi 4 + 5 + 6 + 8 + 9 = 32. Kaja może dostać stos o mniejszej sumie, więc aby zapewnić sobie 16 punktów, musiałaby podzielić karty na dwie równe sumy po 16. Większego wyniku nie zapewni, bo na dwóch stosach zabrakłoby punktów.

2. Stosu o sumie 16 nie da się utworzyć. Gdyby zawierał kartę 9, pozostałe karty musiałyby dać 7. Żadna z kart 4, 5, 6 i 8 nie ma wartości 7, a już dwie najmniejsze dają 9.

3. Jeśli w stosie nie ma 9, ale jest 8, z kart 4, 5 i 6 trzeba byłoby dołożyć sumę 8. To także niemożliwe: jedna karta nie wystarcza, a dwie dają co najmniej 9. Bez kart 9 i 8 nawet wszystkie pozostałe dają tylko 4 + 5 + 6 = 15.

4. Podział na stosy [6, 9] oraz [4, 5, 8] daje sumy 15 i 17. Niezależnie od wyboru Leona Kaja dostanie co najmniej 15 punktów. To największy wynik, który może sobie zapewnić.

14. Najkrótszy zapis kontrolny

Odpowiedź: 7

1. Zapis z sześciu liter ma dokładnie cztery fragmenty trzyliterowe: zaczynające się na miejscach 1, 2, 3 i 4. Przy pięciu literach byłoby ich tylko trzy.

2. Aby sześć liter wystarczyło, te cztery fragmenty musiałyby być dokładnie fragmentami AAA, ABB, BBA i BAB, w jakiejś kolejności.

3. Fragment przesunięty o jedno miejsce względem AAA musi zaczynać się od AA albo kończyć na AA. Żaden z trzech pozostałych wymaganych fragmentów nie ma tej własności.

4. W zapisie sześcioliterowym AAA ma przynajmniej jeden sąsiedni fragment trzyliterowy. Nie może to być żaden z pozostałych wymaganych fragmentów, więc sześć liter nie wystarczy.

5. Siedem liter wystarczy: AAABBAB. Fragment AAA zaczyna się na miejscu 1, ABB na 3, BBA na 4, a BAB na 5. Minimum wynosi 7.

Klasa V | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

15. Iloraz taki jak reszta

Odpowiedź: 6

1. Gdyby reszta wynosiła co najmniej 8, iloraz też wynosiłby co najmniej 8, a dzielnik co najmniej 9. Dzielona liczba byłaby wtedy nie mniejsza niż $8 \times 9 + 8 = 80$. To za dużo.

2. Reszta może więc wynosić najwyżej 7. Gdyby reszta i iloraz wynosiły 7, po odjęciu reszty zostałoby $72 - 7 = 65$. Ta liczba musiałaby być równa siedmiokrotności dzielnika. Jednak $7 \times 9 = 63$, a $7 \times 10 = 70$, więc 65 nie jest wielokrotnością 7.

3. Reszta 6 jest możliwa: $72 = 6 \times 11 + 6$. Iloraz i reszta są równe 6, a reszta jest mniejsza od dzielnika 11.

4. Największa możliwa reszta wynosi zatem 6.

Klasa VI | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

1. Dwa kolory na pasku

Odpowiedź: A. 1/6

1. Niebieskich pól jest 2/3 · 18 = 12, czyli są to pola od 1 do 12.

2. Żółtych pól jest 1/2 · 18 = 9, czyli są to pola od 10 do 18.

3. Oba kolory mają pola 10, 11 i 12. Stanowią one 3/18 = 1/6 całego paska.

2. Błąd w zapisie

Odpowiedź: B. 11

1. Początkowa suma czterech zapisanych liczb wynosi 4 · 13 = 52.

2. Poprawienie 18 na 10 zmniejsza sumę o 8. Prawidłowa suma to 44.

3. Nowa średnia wynosi 44 : 4 = 11.

3. Dwa sklejone klocki

Odpowiedź: C. 112 cm²

1. Jeden klocek ma pole powierzchni 2 · (2 · 3 + 2 · 5 + 3 · 5) = 62 cm². Dwa osobne klocki mają łącznie 124 cm².

2. Najmniejsza ściana ma pole 2 · 3 = 6 cm². Sklejenie takich ścian usuwa z powierzchni zewnętrznej 12 cm².

3. Największe możliwe pole wynosi 124 − 12 = 112 cm². Sklejenie większych ścian zmniejszyłoby je bardziej.

4. Blisko punktu na osi

Odpowiedź: D. 7

1. Liczby odległe od −3 dokładnie o 4 to −7 i 1.

2. Szukamy liczb całkowitych leżących ściśle między nimi: −6, −5, −4, −3, −2, −1 i 0.

3. Jest ich 7.

Klasa VI | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

5. Dwa automaty rachunkowe

Odpowiedź: A. Wynik A jest o 1,5 większy od wyniku B.

1. Oba automaty zawierają w wyniku połowę wpisanej liczby.

2. Automat A dodaje do tej połowy 3. Automat B dodaje tylko połowę liczby 3, czyli 1,5.

3. Wynik A jest więc zawsze większy o $3 - 1{,}5 = 1{,}5$.

6. Jedna karta zostaje

Odpowiedź: A. 4

1. Suma liczb od 1 do 9 wynosi 45. Gdyby wszystkie cztery pary miały sumę 8, suma wybranych kart wynosiłaby 32. Każda para o sumie 11 zamiast 8 zwiększa ten wynik o 3.

2. Możliwe sumy wybranych kart to zatem 32, 35, 38, 41 i 44. Na pominiętej karcie musiałaby być odpowiednio liczba 13, 10, 7, 4 albo 1. Spośród dostępnych kart możliwe są więc tylko 7, 4 i 1.

3. Nie można pominąć karty 7. Wtedy karta 1 nie znalazłaby partnera: aby uzyskać 8, potrzebowałaby 7, a aby uzyskać 11 - niedostępnej karty 10.

4. Kartę 4 można pominąć, tworząc pary (1, 7), (2, 9), (3, 8), (5, 6). Ich sumy to 8, 11, 11 i 11. Największa możliwa pominięta liczba to 4.

7. Dwa pasy płytek

Odpowiedź: B. 54 cm²

1. Dwa dłuższe boki mają łącznie taką długość jak trzy krótsze. Możemy więc podzielić krótszy bok na dwie jednakowe części, a dłuższy na trzy takie części.

2. Szerokość dużego prostokąta ma sześć takich części. Jego wysokość to wysokości obu pasów, czyli dwie części i trzy części: razem pięć.

3. Obwód dużego prostokąta składa się z $2 \cdot (6 + 5) = 22$ części. Jedna ma długość $66 : 22 = 3$ cm.

4. Boki płytki mają $2 \cdot 3 = 6$ cm i $3 \cdot 3 = 9$ cm. Jej pole wynosi $6 \cdot 9 = 54$ cm².

Klasa VI | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

8. Linia przez płytki

Odpowiedź: B. 8

1. Między sześcioma kolumnami jest pięć wewnętrznych linii pionowych, a między czterema rzędami - trzy poziome. Odcinek przecina każdą z nich.

2. Linie poziome leżą na 1/4, 1/2 i 3/4 wysokości podłogi. Odcinek przecina je odpowiednio po przebyciu 1/4, 1/2 i 3/4 szerokości, czyli po 1,5, 3 oraz 4,5 szerokości płytki.

3. Tylko środkowe przecięcie leży też na wewnętrznej linii pionowej. Punkt ten policzylibyśmy dwa razy, dlatego różnych punktów przejścia między płytkami jest $5 + 3 - 1 = 7$.

4. Przed pierwszym przejściem jesteśmy we wnętrzu jednej płytki. Każde z siedmiu przejść prowadzi do wnętrza jednej następnej płytki, także przejście przez środkowy narożnik. Odcinek przechodzi więc przez wnętrza $1 + 7 = 8$ płytek.

9. Równa powierzchnia ramki i środka

Odpowiedź: B. 2 cm

1. Kartka ma pole $16 \cdot 12 = 192$ cm². Niepomalowany środek powinien mieć 96 cm².

2. Dla szerokości 1 cm środek ma wymiary 14 cm × 10 cm i pole 140 cm². Dla 2 cm ma 12 cm × 8 cm, czyli 96 cm².

3. Szersza ramka daje już mniejsze pole środka. Szukana szerokość wynosi 2 cm.

10. Cztery karty, dwa ułamki

Odpowiedź: B. 23/6

1. Aby suma była największa, liczby 2 i 3 powinny być w mianownikach, a 4 i 5 w licznikach. Gdy mniejsza liczba jest w liczniku, a większa w mianowniku, zamiana tych kart zwiększa sumę: albo powiększa jeden ułamek, albo jednocześnie powiększa licznik jednego ułamka i zmniejsza mianownik drugiego.

2. Pozostają dwa różne ustawienia: $5/2 + 4/3 = 15/6 + 8/6 = 23/6$ oraz $4/2 + 5/3 = 12/6 + 10/6 = 22/6$.

3. Największa suma wynosi 23/6.

Klasa VI | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

11. Przekątna trapezu

Odpowiedź: 4 cm

1. Wysokość każdego z obu trójkątów, opuszczona na odpowiednią podstawę trapezu, wynosi 4 cm.

2. Z wzoru na pole trójkąta długości podstaw wynoszą $2 \cdot 14 : 4 = 7$ cm oraz $2 \cdot 22 : 4 = 11$ cm.

3. Różnica wynosi $11 - 7 = 4$ cm.

12. Żetony między sąsiadami

Odpowiedź: 2

1. Żeton w A otrzymuje 0 punktów, w B - 1, w C - 2, w D - 3, a w E - 4. Punkty zależą tylko od pudełka, w którym żeton właśnie leży.

2. W każdym ruchu jeden z dwóch żetonów przesuwa się w lewo i traci 1 punkt. Drugi przesuwa się w prawo i zyskuje 1 punkt. Łączna liczba punktów nie zmienia się.

3. Na początku mamy $6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 12$ punktów. Na końcu pojedyncze żetony w B i D dają $1 + 3 = 4$ punkty. Pudełko C jest puste, a żetony w A nie dodają punktów.

4. Na żetony w E pozostaje więc $12 - 4 = 8$ punktów. Każdy z nich daje 4 punkty, zatem w E są $8 : 4 = 2$ żetony.

5. Opisany stan można osiągnąć: wybieramy kolejno pudełka B, B, B, C, D, C, B, D, C i w każdym wykonujemy podany ruch. Na końcu liczby żetonów w A, B, C, D, E wynoszą 4, 1, 0, 1, 2.

Klasa VI | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

13. Gra na siedmiu polach

Odpowiedź: 3

1. Pole 1 jest symetryczne do 7, pole 2 do 6, a pole 3 do 5. Wystarczy więc osobno rozpatrzyć pierwsze ruchy na polach 1, 2, 3 i 4.

2. Po ruchu Ali na pole 2 dostępne są pola 4, 5, 6 i 7. Niezależnie od tego, które wybierze Bartek, zostanie jedno dostępne pole albo dwa sąsiednie pola. Ala stawia pionek na jednym z nich i Bartek nie ma już ruchu. Pole 2 daje wygraną; z symetrii tak samo pole 6.

3. Po ruchu Ali na pole 4 zostają dwie pary sąsiednich pól: 1, 2 oraz 6, 7. Bartek zajmie pole z jednej pary i zablokuje drugie pole tej pary. Ala zajmie pole z pozostałej pary i wygra.

4. Jeśli Ala zacznie na polu 1, Bartek może zająć pole 5. Wtedy dostępne zostają tylko pola 3 i 7. Ala zajmie jedno, Bartek drugie i to Ala nie będzie miała kolejnego ruchu. Pierwszy ruch na 1 nie zapewnia jej wygranej; tak samo ruch na 7.

5. Jeśli Ala zacznie na polu 3, Bartek może zająć pole 5. Dostępne zostają tylko pola 1 i 7. Znów Ala zajmie jedno, a Bartek drugie i wygra. Z symetrii pierwszy ruch na polu 5 także nie zapewnia Ali wygranej.

6. Wygraną zapewniają dokładnie pierwsze ruchy na polach 2, 4 i 6, czyli 3 różne ruchy.

14. Trasa robota

Odpowiedź: 14

1. Trasa A-B-C-D-A trwa 3 + 2 + 5 + 4 = 14 minut.

2. Dwie pozostałe możliwości, z pominięciem jazdy w odwrotną stronę, to A-B-D-C-A: 23 minuty oraz A-C-B-D-A: 21 minut.

3. Wyczerpaliśmy wszystkie kolejności odwiedzin trzech punktów, więc najkrótszy czas wynosi 14 minut.

Klasa VI | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

15. Sześć wież

Odpowiedź: 10

1. W pierwszej kolumnie potrzeba co najmniej 2 + 1 = 3 klocków. W drugiej co najmniej 3 + 1 = 4, a w trzeciej co najmniej 2 + 1 = 3. Razem co najmniej 10.

2. Tyle wystarczy: w pierwszym rzędzie ustawiamy wieże o wysokościach 1, 3, 2, a w drugim 2, 1, 1.

3. Maksima rzędów to 3 i 2, a kolumn 2, 3 i 2. Wszystkie warunki są spełnione, więc minimum wynosi 10.

Klasa VII | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

1. Ile ważą opakowania?

Odpowiedź: C. 216 g

1. Opakowanie stanowi 100% − 85% = 15% masy pełnej paczki.

2. Jedno opakowanie waży 15% · 480 g = 72 g.

3. Trzy puste opakowania ważą 3 · 72 g = 216 g.

2. Ostatnia porcja farby

Odpowiedź: B. 10

1. Do 6 miarek białej farby potrzeba 4 miarek niebieskiej, bo obie ilości z przepisu podwajamy.

2. Powstaje 6 + 4 = 10 miarek mieszanki, a 1 miarka niebieskiej zostaje.

3. Większa ilość mieszanki wymagałaby więcej niż 6 miarek białej farby. Nie można więc przygotować jej więcej.

3. Dwie promocyjne trójki

Odpowiedź: C. 51 zł

1. Wszystkie ceny sumują się do 70 zł. Aby zapłacić jak najmniej, chcemy uzyskać jak największą łączną cenę dwóch bezpłatnych gier.

2. W trójce zawierającej grę za 6 zł to właśnie ona będzie bezpłatna. W drugiej trójce najtańsza gra nie może kosztować więcej niż 13 zł: są tylko dwie gry droższe niż 13 zł, a trójka wymaga trzech gier.

3. Łączny rabat nie przekroczy więc 6 + 13 = 19 zł. Osiągamy go, tworząc trójki (6, 8, 10) oraz (13, 15, 18).

4. Najmniejsza zapłata wynosi 70 − 19 = 51 zł.

4. Ta sama objętość

Odpowiedź: B. 6 cm

1. Objętość pierwszego graniastosłupa wynosi 18 · 10 = 180 cm^3.

2. W drugim 30 · h = 180, więc h = 6 cm.

Klasa VII | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

5. Najmniejsza grupa

Odpowiedź: A. 40

1. 37,5% = 3/8, więc liczba wszystkich uczestników musi być podzielna przez 8.

2. 20% = 1/5, więc ta sama liczba musi być podzielna przez 5. Najmniejsza dodatnia wspólna wielokrotność 8 i 5 to 40.

3. Dla 40 osób otrzymujemy 15 w modelarstwie, 8 na rysunku i 17 na fotografii. Taki podział jest możliwy.

6. Dwa numery na pewno

Odpowiedź: B. 7

1. Podzielmy numery na sześć grup: {1, 4, 7}, {2, 5, 8}, {3, 6, 9}, {10, 13}, {11, 14}, {12, 15}. W każdej grupie każde dwa różne numery różnią się o 3 lub o 6.

2. Jeśli wybierzemy siedem żetonów, przynajmniej dwa muszą pochodzić z tej samej grupy, bo grup jest tylko sześć. Te dwa żetony spełniają warunek.

3. Sześć nie wystarczy: możemy wybrać numery 1, 2, 3, 10, 11 i 12. W obrębie każdej z trójek różnice to 1 lub 2, a pomiędzy trójkami - od 7 do 11. Nie ma różnicy 3 ani 6.

4. Najmniejsza liczba zapewniająca sukces to 7.

7. Jedna sala dla dwóch zajęć

Odpowiedź: C. 4

1. Zarezerwujmy jedną salę wspólną dla B i E. Zajęcia A nie mogą się w niej odbywać, bo od 9:30 do 10:00 trwałyby równocześnie z B. Zajęcia C nie mogą jej użyć, bo od 11:00 do 12:00 pokrywają się z E. Zajęcia D również nie mogą jej użyć, bo od 11:00 do 11:30 pokrywają się z E.

2. Od 10:30 do 11:00 zajęcia A, C i D odbywają się jednocześnie. Potrzebują więc trzech różnych sal, innych niż wspólna sala B i E. Łącznie trzeba mieć co najmniej cztery sale.

3. Cztery wystarczają: w pierwszej sali odbywają się B i E, w drugiej A, w trzeciej C, a w czwartej najpierw D, potem F. Zajęcia D kończą się dokładnie o 11:30, gdy zaczynają się F.

4. Najmniejsza liczba sal wynosi 4. Sama największa liczba jednoczesnych zajęć, równa 3, nie wystarcza z powodu dodatkowego warunku wspólnej sali dla B i E.

Klasa VII | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

8. Pomyłka przy odbiorze

Odpowiedź: B. 12

1. Własny parasol nie może trafić do właściciela czerwonego parasola. Wtedy poza nim zostałby tylko jeden czerwony parasol, a potrzebowałyby ich trzy osoby mające własne parasole niebieskie.

2. Własny parasol musi więc dostać jedna z trzech osób z niebieskimi parasolami. Są trzy możliwości wyboru tej osoby.

3. Zostają dwie osoby, które potrzebują czerwonych parasoli, i dwa czerwone parasole. Można je rozdać na dwa sposoby. Pozostałe dwie osoby muszą dostać dwa niebieskie parasole - też na dwa sposoby.

4. Dla każdej osoby z własnym parasolem otrzymujemy $2 \cdot 2 = 4$ przydziały. Łącznie jest ich $3 \cdot 4 = 12$. W każdym dokładnie jedna osoba ma własny parasol, bo wszystkie pozostałe otrzymują inny kolor.

9. Trzy obwody pudełka

Odpowiedź: A. 400 cm³

1. Sumy par długości krawędzi wynoszą 13, 15 i 18 cm. Dodając je, otrzymujemy dwa razy sumę trzech różnych wymiarów: $13 + 15 + 18 = 46$.

2. Suma trzech wymiarów wynosi więc 23 cm. Same wymiary to $23 - 18 = 5$ cm, $23 - 15 = 8$ cm i $23 - 13 = 10$ cm.

3. Objętość wynosi $5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$ cm³.

10. Kiedy dzielenie jest dokładne?

Odpowiedź: C. 2

1. Liczbę $n + 2$ można zapisać jako $(n - 1) + 3$. Po dzieleniu otrzymujemy 1 oraz dodatkowo $3 : (n - 1)$.

2. Wynik jest całkowity dokładnie wtedy, gdy dodatnia liczba $n - 1$ jest dzielnikiem 3. Może więc wynosić 1 albo 3.

3. Odpowiadają temu $n = 2$ oraz $n = 4$. Są dwie wartości.

Klasa VII | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

11. Pięć ważeń

Odpowiedź: 5 g

1. Suma wyników pięciu ważeń wynosi 13 + 18 + 21 + 17 + 11 = 80 g. Każdy woreczek wystąpił dokładnie w dwóch ważeniach, więc wszystkie pięć woreczków waży razem 80 : 2 = 40 g.

2. Woreczki B i C ważą razem 18 g, a D i E razem 17 g. Bez woreczka A mamy więc 18 + 17 = 35 g.

3. Woreczek A waży 40 − 35 = 5 g. Dla sprawdzenia pozostałe woreczki mają masy: B - 8 g, C - 10 g, D - 11 g, E - 6 g; wszystkie podane ważenia się zgadzają.

12. Pakiety na wystawę

Odpowiedź: 117 zł

1. Cztery duże pakiety i jeden mały dają 46 etykiet i kosztują 4 · 25 + 17 = 117 zł.

2. Sprawdzamy mniejszą liczbę dużych pakietów. Przy 0 dużych potrzeba 8 małych: koszt 136 zł. Przy 1 dużym potrzeba 6 małych: 127 zł. Przy 2 dużych potrzeba 4 małych: 118 zł. Przy 3 dużych potrzeba 3 małych: 126 zł.

3. Przy 4 dużych potrzebny jest jeszcze co najmniej 1 mały pakiet. Pięć lub więcej dużych pakietów kosztuje już co najmniej 125 zł.

4. Wszystkie inne możliwości są droższe, więc najmniejszy koszt wynosi 117 zł.

13. Ruchomy chodnik

Odpowiedź: 120

1. Bez pomocy chodnika Lena pokonuje całą drogę w 60 sekund, więc przez 40 sekund samymi krokami pokonuje 40/60 = 2/3 tej drogi.

2. Na włączonym chodniku w tych samych 40 sekundach przebywa całą drogę. Ruch chodnika przesuwa ją więc o pozostałą 1/3 długości.

3. Gdy Lena stoi, przesuwa ją wyłącznie chodnik. Skoro 1/3 drogi pokonuje on w 40 sekund, na całą drogę potrzeba 3 · 40 = 120 sekund.

Klasa VII | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

14. Dwa urządzenia, trzy plakaty

Odpowiedź: 17 minut

1. Laminator potrzebuje łącznie 7 + 2 + 5 = 14 minut. Najwcześniej może zacząć po 3 minutach, bo tyle trwa najkrótsze drukowanie. Wszystkie plakaty nie mogą więc być gotowe wcześniej niż po 3 + 14 = 17 minutach.

2. Taką granicę można osiągnąć. Drukujemy najpierw C od minuty 0 do 3, potem A od 3 do 7, a na końcu B od 7 do 13.

3. Laminujemy C od minuty 3 do 8, A od 8 do 15, a B od 15 do 17. Za każdym razem druk danego plakatu jest już ukończony, gdy zaczynamy jego laminowanie.

4. Wszystkie warunki są spełnione, a ostatni plakat jest gotowy po 17 minutach. Jest to najkrótszy możliwy czas.

15. Dwa ułamki jednostkowe

Odpowiedź: 2

1. Niech a będzie mniejszym mianownikiem. Dla $a \leq 3$ już sam ułamek $1/a$ jest większy od $3/10$. Dla $a \geq 7$ suma dwóch ułamków byłaby mniejsza niż $2/7$, a $2/7 < 3/10$. Pozostają $a = 4, 5, 6$.

2. Dla $a = 4$ drugi ułamek to $3/10 - 1/4 = 1/20$. Otrzymujemy parę $1/4$ i $1/20$.

3. Dla $a = 5$ drugi ułamek to $3/10 - 1/5 = 1/10$. Otrzymujemy parę $1/5$ i $1/10$.

4. Dla $a = 6$ drugi ułamek to $3/10 - 1/6 = 2/15$. Aby był równy $1/b$, potrzeba $b = 15/2$, a to nie jest liczba naturalna.

5. Są zatem dokładnie dwie pary.

Klasa VIII | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

1. Przeliczone wyniki

Odpowiedź: C. 13

1. Początkowa suma wynosi $6 \cdot 8 = 48$.

2. Podwojenie każdej liczby podwaja sumę do 96. Następnie odejmujemy po 3 od sześciu liczb, czyli łącznie 18.

3. Suma nowych liczb wynosi 78, a średnia $78 : 6 = 13$.

2. Kwadraty przy trójkącie

Odpowiedź: B. 28 cm

1. Największy kwadrat zbudowano na przeciwprostokątnej. Z twierdzenia Pitagorasa jego pole jest sumą pól dwóch mniejszych kwadratów: $18 + 31 = 49$ cm².

2. Kwadrat o polu 49 cm² ma bok długości 7 cm, ponieważ $7^2 = 49$.

3. Jego obwód wynosi $4 \cdot 7 = 28$ cm.

3. Najpierw pudełko

Odpowiedź: D. 5/8

1. Dla pudełka A zapiszmy cztery możliwości: czerwony, czerwony, niebieski, niebieski. Każdy rzeczywisty żeton reprezentujemy dwa razy, więc szanse obu kolorów wewnątrz A pozostają równe.

2. Dla pudełka B mamy cztery możliwości: czerwony, niebieski, niebieski, niebieski. Każda z nich ma taką samą szansę.

3. Pudełka są wybierane z jednakową szansą, a każdemu przypisaliśmy po cztery jednakowo prawdopodobne możliwości. Mamy więc łącznie osiem równych przypadków.

4. Niebieski występuje w dwóch przypadkach dla A i trzech dla B, czyli w pięciu z ośmiu. Szukane prawdopodobieństwo wynosi 5/8.

Klasa VIII | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

4. Pominięte urządzenie

Odpowiedź: B. 5

1. Urządzenia przepuszczają kolejno 1/2, 2/3, 3/4, ..., 9/10 dopływającego płynu. Gdy działają wszystkie, ich iloczyn skraca się do 1/10: każdy licznik od 2 do 9 skraca się z takim samym mianownikiem.

2. Przez pełny układ przeszłyby więc 2 litry. Pominięcie jednego urządzenia dało 2,5 litra.

3. Pozostałe urządzenia mnożą ilość płynu przez te same ułamki w obu próbach. Iloraz końcowych ilości, 2 : 2,5 = 4/5, jest zatem właśnie ułamkiem przepuszczanym przez pominięte urządzenie.

4. Urządzenie przepuszczające 4/5 odlewa 1/5. Jego numer to 5.

5. Średnia na pozostawionej karcie

Odpowiedź: B. 2/5

1. Możliwych par bez uwzględniania kolejności jest 10: z pierwszą kartą 4, z drugą 3 dalsze, z trzecią 2 i z czwartą 1. Każda para ma taką samą szansę.

2. Warunek spełniają pary (3, 7), (3, 11), (5, 9) i (7, 11). Ich średnie to odpowiednio 5, 7, 7 i 9; za każdym razem ta karta pozostała.

3. Mamy 4 sprzyjające pary spośród 10, więc prawdopodobieństwo wynosi 4/10 = 2/5.

6. Kąt między ramionami

Odpowiedź: A. 50°

1. Oznaczmy kąt BAC przez x, a oba kąty przy podstawie trójkąta ABC przez y. Mamy $x + 2y = 180°$.

2. W trójkącie BCD boki BC i BD są równe, więc kąty BCD i BDC są równe. Kąt BCD to y, bo punkt D leży na boku AC. Zatem kąt DBC ma $180° - 2y$, czyli x.

3. Cały kąt ABC składa się z kąta ABD równego 15° oraz kąta DBC równego x. Stąd $y = 15° + x$.

4. Podstawiamy: $x + 2(15° + x) = 180°$, więc $3x = 150°$ i $x = 50°$.

Klasa VIII | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

7. Jedna liczba mniej

Odpowiedź: D. 4

1. Jedno zero na końcu iloczynu odpowiada jednemu czynnikowi 10, czyli parze czynników 2 i 5.

2. W liczbach od 1 do 25 czynniki 5 pochodzą z liczb 5, 10, 15, 20 i 25. Pierwsze cztery dostarczają po jednej piątce, a 25 dostarcza dwóch. Razem jest sześć piątek.

3. Skreślenie jednej liczby usuwa najwyżej dwie piątki. Osiągamy to, skreślając 25. W iloczynie pozostają wtedy cztery piątki.

4. Dwójek na pewno wystarczy: wśród liczb od 1 do 25 jest dwanaście liczb parzystych, a po skreśleniu dowolnej jednej liczby zostaje co najmniej jedenaście. Każda dostarcza przynajmniej jednej dwójki, a piątek jest najwyżej sześć.

5. Liczbę zer wyznaczają więc piątki. Mniej niż cztery pozostać nie mogą, a po skreśleniu 25 pozostają dokładnie cztery. Minimum wynosi 4.

8. Klocek w naczyniu

Odpowiedź: C. 7,5 cm

1. Objętość wody to $10 \cdot 10 \cdot 6 = 600$ cm³.

2. Poniżej górnej ściany klocka woda zajmuje w każdym poziomym przekroju pole $100 - 4 \cdot 5 = 80$ cm². Do wysokości 8 cm zmieściłoby się tam $80 \cdot 8 = 640$ cm³, więc klocek nie zostanie całkowicie zanurzony.

3. Wysokość wody wynosi $600 : 80 = 7{,}5$ cm. Jest mniejsza od 8 cm, zgodnie z przyjętym obliczeniem.

Klasa VIII | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

9. Wzory z dwóch końców

Odpowiedź: C. 10

1. Przy wyróżnionych końcach wybieramy trzy miejsca na granatowe pola. Jeśli pierwsze granatowe pole jest na miejscu 1, dwa następne wybieramy spośród pięciu miejsc: daje to $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ par. Dla pierwszego granatowego pola na miejscach 2, 3 i 4 otrzymujemy odpowiednio 6, 3 i 1 ustawienie. Dalej pierwsze granatowe pole nie może już leżeć. Łącznie jest $10 + 6 + 3 + 1 = 20$ ustawień.

2. Układ identyczny po odwróceniu musiałby mieć takie same kolory na miejscach 1 i 6, 2 i 5 oraz 3 i 4. Każdy kolor występowałby więc parzystą liczbę razy.

3. Tutaj każdy kolor występuje trzy razy. Żaden układ nie jest więc identyczny ze swoim odwróceniem.

4. Każdy wzór policzyliśmy dokładnie dwa razy: w jednej kolejności i w odwróconej. Liczba różnych wzorów wynosi $20 : 2 = 10$.

10. Różnice kwadratów

Odpowiedź: D. 30

1. Każda liczba nieparzysta ma postać $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$. Zatem wszystkie 20 nieparzystych liczb w podanym zakresie można otrzymać.

2. Każda dodatnia wielokrotność 4 ma postać $4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$, gdzie $k \geq 1$. W zakresie jest 10 takich liczb.

3. Kwadrat liczby parzystej jest podzielny przez 4, a kwadrat nieparzystej daje resztę 1. Różnica dwóch kwadratów nie może więc dawać reszty 2 przy dzieleniu przez 4.

4. Otrzymujemy dokładnie $20 + 10 = 30$ liczb.

Klasa VIII | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

11. Piąta prosta

Odpowiedź: 2

1. Nowa prosta z k różnymi punktami przecięcia jest podzielona na k + 1 części. Każda część rozcina jeden wcześniejszy obszar na dwa, więc przybywa k + 1 obszarów.

2. Zaczynamy od jednej płaszczyzny bez prostych. Pierwsze cztery proste dodają kolejno 1, 2, 3 i 4 obszary, bo nie są równoległe i nie ma wspólnego punktu trzech z nich. Razem jest 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11 obszarów.

3. Piąta prosta dodała 14 − 11 = 3 obszary. Ma więc dokładnie dwa różne punkty przecięcia z wcześniejszymi prostymi.

4. Piąta prosta przecina każdą z czterech wcześniejszych prostych. W jednym punkcie mogą spotkać się najwyżej dwie z tych czterech, bo wśród nich nie ma trzech przechodzących przez jeden punkt. Aby zmieścić cztery przecięcia w dwóch różnych punktach, w każdym z nich muszą spotkać się po dwie wcześniejsze proste.

5. Zatem oba te punkty są punktami przecięcia pierwszych czterech prostych. Piąta prosta przechodzi przez 2 takie punkty.

12. Linki dwóch masztów

Odpowiedź: 12 m

1. Niech x oznacza odległość w metrach od punktu P do podstawy masztu, do którego biegnie linka długości 13 m. Odległość do drugiej podstawy wynosi wtedy 14 − x metrów.

2. Z twierdzenia Pitagorasa kwadrat wspólnej wysokości wynosi zarówno $13^2 - x^2$, jak i $15^2 - (14 - x)^2$.

3. Porównujemy te zapisy: $169 - x^2 = 225 - (196 - 28x + x^2)$. Po uproszczeniu otrzymujemy $169 = 29 + 28x$, więc $x = 5$.

4. Kwadrat wysokości wynosi $13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$. Wysokość każdego masztu to 12 m.

5. Kontrola drugiej linki: druga odległość na podłożu wynosi 14 − 5 = 9 m, a $9^2 + 12^2 = 15^2$.

Klasa VIII | Rozwiązania

Zestaw treningowy 01 - przygotowanie do etapu I

13. Większy prostokąt

Odpowiedź: 36 cm

1. Początkowe wymiary oznaczmy przez a i b. Nowe pole wynosi $(a + 3)(b + 3) = ab + 3a + 3b + 9$.

2. Przyrost pola to $3a + 3b + 9 = 63$, więc $3(a + b) = 54$ i $a + b = 18$.

3. Początkowy obwód wynosił $2(a + b) = 36$ cm. Nie trzeba znać osobno obu wymiarów.

14. Cztery roboty, cztery prace

Odpowiedź: 10

1. R1, R2 i R3 potrzebują na pracę C lub D co najmniej 10 minut. Aby skończyć wcześniej, każdy z tych trzech robotów musiałby dostać pracę A albo B.

2. Nie da się przydzielić trzem robotom trzech różnych prac, mając tylko A i B. Dlatego czas krótszy niż 10 minut jest niemożliwy.

3. Czas 10 minut jest osiągalny: R1 wykonuje A w 4 minuty, R2 wykonuje B w 7, R3 wykonuje C w 10, a R4 wykonuje D w 5. Wszystkie prace są wtedy gotowe po 10 minutach.

15. Zapis wejść i wyjść

Odpowiedź: 14

1. Dla jednej pary wejście-wyjście możliwy jest tylko zapis $+-$. Dla dwóch par są dwa: $++--$ i $+-+-$. Dla trzech par jest pięć: $+++---$, $++-+--$, $++--+-$, $+-++--$, $+-+-+-$.

2. Teraz rozpatrzmy pierwszą chwilę, w której sala znowu jest pusta. Jeśli następuje po 2 zdarzeniach, początek to $+-$, a pozostałe trzy pary można zapisać na 5 sposobów.

3. Jeżeli pierwszy powrót do pustej sali następuje po 4 zdarzeniach, początek musi być $++--$, a pozostałe dwie pary dają 2 możliwości.

4. Jeżeli następuje po 6 zdarzeniach, między pierwszym + a zamykającym − mieści się poprawny zapis dwóch par, czyli 2 możliwości. Pozostałe dwa znaki to $+-$.

5. Jeżeli następuje dopiero po 8 zdarzeniach, po usunięciu pierwszego + i ostatniego − zostaje poprawny zapis trzech par: 5 możliwości. Suma wynosi $5 + 2 + 2 + 5 = 14$.